ACADEMIE DE NANCY-METZ
UNIVERSITE DE NANCY II

I. C. N.

Concours 1986

MATHEMATIQUES Durée : 4 heures

Régime Economique "B"

Régime Technologique "G-H"

1er exercice :

On considère une urne contenant 1 boule rouge, 2 boules noires et 3 boules jaunes. On effectue des tirages successifs sans remise jusqu'à ce qu'il ne reste plus dans l'urne que des boules de deux couleurs différentes.

On note X la variable aléatoire "nombre de tirages effectués".

Déterminer la loi de X et calculer son espérance et sa variance.

(Tous les résultats devront être présentés sous forme de nombres rationnels irréductibles).

2ème exercice :

Pour n entier strictement positif, on définit

$$\begin{cases} u_n = \dfrac{\pi^2 n^2}{2} \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^2}\, dt \\ v_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} (t^2 - \pi^2 n^2)\, |\sin t|\, dt \end{cases}$$

1) Montrer que $v_n = (2n+1)\pi^2 - 4$

2) a. En effectuant le changement de variable $t = \pi + x$ dans l'expression de u_{n+1}, montrer que la suite (u_n) est croissante.

b. En majorant $|\sin t|$ par 1, montrer que la suite (u_n) est bornée, donc convergente.

3) a. Vérifier que $1 = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|\, dt$

b. En déduire l'encadrement suivant :

$$\frac{v_n}{2(n+1)^2\pi^2} \leqslant 1 - u_n \leqslant \frac{v_n}{2n^2\pi^2}$$

c. Quelle conclusion peut-on en tirer pour la suite (u_n) ?

Problème :

Soit n un entier $\geqslant 2$. $\mathcal{P}_n$ représente l'espace vectoriel des polynômes réels de degré $\leqslant n$. Pour tout $P \in \mathcal{P}_n$, on note $f(P)$ le polynôme défini par :

$f(P)(x) = (x-1)\, P'(x) + 2\, P(0)$, où P' représente le polynôme dérivé de P.

1) a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{P}_n$.

b. Donner la matrice A_n de f dans la base canonique $B_n = (1, x, x^2, \ldots, x^n)$ de $\mathcal{P}_n$.

c. Démontrer que f est injectif.

d. Déterminer A_n^{-1}, la matrice inverse de A_n.

2) Pour i entier appartenant à $[1,n]$, on pose $Q_i(x) = (\frac{i}{2} - 1)(1 - x)^i + 1$

a. Vérifier que Q_i est un vecteur propre de f, associé à la valeur propre $\lambda_i = i$.

b. Montrer que si i est pair, $Q_i(x)$ est strictement positif pour tout réel x.

c. Montrer que si i est impair, $i = 2k+1$, $Q_{2k+1}(x) = 0$ possède une unique solution réelle que l'on calculera et que l'on notera s_k. Déterminer $\lim\limits_{k \to +\infty} s_k$.

3) Soit B'_n la famille de $\mathcal{P}_n$ constituée des polynômes

$\{ x^2, Q_1(x), Q_2(x), \ldots, Q_n(x) \}$

a. Montrer que B'_n est une base de $\mathcal{P}_n$. On notera P_n la matrice de passage de la base B_n à la base B'_n.

b. Donner la matrice A'_n de f dans la base B'_n.

4) a. Démontrer qu'il existe deux suites $(a_p)_{p \geqslant 0}$ et $(b_p)_{p \geqslant 0}$ de $\mathbb{Z}$ telles que $\forall p \in \mathbb{N}$:

$$(A'_2)^p = \begin{pmatrix} 2^p & 0 & 0 \\ a_p & 1 & 0 \\ b_p & 0 & 2^p \end{pmatrix} \quad \left[\text{ par convention } (A'_2)^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \right.$$

Donner les formules de récurrence liant a_{p+1} et a_p d'une part, b_{p+1} et b_p d'autre part.

b. En déduire les expressions exactes de a_p et b_p (on pourra utiliser $\frac{b_p}{2^p}$).

c. Comment peut-on en déduire pour tout $n \geqslant 2$ les matrices $(A'_n)^p$ et $(A_n)^p$?

d. En remplaçant p par -p dans l'expression de $(A'_2)^p$, vérifier que la matrice obtenue est l'inverse de $(A'_2)^p$, c'est-à-dire $(A'_2)^{-p}$.